Chapitre 5 : Fonctions réelles

1 Intervalles

1.1 Segments

Définition 1.1. Soit $a \leq b \in \mathbb{R}$
On définit le segment $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

Proposition 1.2. Soit $a \leq b \in \mathbb{R}$
On a $[a, b] = \{(1 - \lambda)a + \lambda b \mid \lambda \in [0, 1]\}$

1.2 Intervalles

Définition 1.3. Une partie $I \subseteq \mathbb{R}$ est un intervalle si $\forall x, y \in I, x \leq y \implies [x, y] \subseteq I$

2 Généralités sur les fonctions réelles

Définition 2.1. Soit $D \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : D \to \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$
On définit :

* Le produit λf : $\begin{cases} D \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda f(x) \end{cases}$
* La somme $f + g$: $\begin{cases} D \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) + g(x) \end{cases}$
* Le produit fg : $\begin{cases} D \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x)g(x) \end{cases}$

2.1 Symétrie

Définition 2.2. Soit $T > 0$

* On appelle domaine T-périodique une partie $D \subseteq \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in D$, $(x + T \in D$ et $x - T \in D)$
* Soit D un domaine T-périodique.
  Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est dite T-périodique si $\forall x \in D$, $f(x + T) = f(x)$

Proposition 2.3. Soit $T > 0$

* Une partie $D \subseteq \mathbb{R}$ est T-périodique si et seulement si $\forall x_0 \in D, \forall x_1 \in \mathbb{R}, x_0 \equiv x_1 (\mathrm{mod}\ T) \implies x_1 \in D$
* Soit D un domaine T-périodique et $f : D \to \mathbb{R}$
  Alors f est T-périodique si et seulement si $\forall x_0, x_1 \in D, x_0 \equiv x_1 (\ \mathrm{mod} T) \implies f(x_0) = f(x_1)$

Proposition 2.4. Soit $T > 0$

* La somme et le produit de deux fonctions T-périodiques est T-périodique.
* Si f est T-périodique, toute composée $g \circ f$ est également T-périodique.

Définition 2.5.

* Une partie $D \subseteq \mathbb{R}$ est dite symétrique (par rapport à 0) si $\forall x \in D, -x \in D$
* Soit $D \subseteq \mathbb{R}$ symétrique et $f : D \to \mathbb{R}$
  On dit que f est :
  — paire si $\forall x \in D, f(-x) = f(x)$
  — impaire si $\forall x \in D, f(-x) = -f(x)$

Proposition 2.6.

* La somme de deux fonctions $\begin{cases} \text{paires} \\ \text{impaires} \end{cases}$ est $\begin{cases} \text{paire} \\ \text{impaire} \end{cases}$
* Le produit de deux fonctions $\begin{cases} \text{paires} \\ \text{impaires} \end{cases}$ est paire.
* Le produit d'une fonction paire et d'une impaire est impaire.
* Une composée $g \circ f$ où f est paire est paire.
* Si les deux fonctions sont paires ou impaires, $g \circ f$ a la parité suivante :

$f \setminus g$	p	i
p	p	p
i	p	i

2.2 Monotonie

Définition 2.7. Soit $D \subseteq \mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$
On dit que :

* f est croissante si $\forall x, y \in D, x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$
* f est strictement croissante si $\forall x, y \in D, x < y \implies f(x) < f(y)$
* f est décroissante si $\forall x, y \in D, x \leq y \implies f(x) \geq f(y)$
* f est strictement décroissante si $\forall x, y \in D, x < y \implies f(x) > f(y)$
* f est (strictement) monotone si elle est (strictement) croissante ou (strictement) décroissante.

Proposition 2.8.

* La somme de deux fonctions $\begin{cases} \text{croissantes} \\ \text{décroissantes} \end{cases}$ est $\begin{cases} \text{croissante} \\ \text{décroissante} \end{cases}$
* La somme d'une fonction $\begin{cases} \text{croissante} \\ \text{décroissante} \end{cases}$ est d'une fonction $\begin{cases} \text{croissante} \\ \text{décroissante} \end{cases}$ est strictement $\begin{cases} \text{croissante} \\ \text{décroissante} \end{cases}$
* La composée de deux fonctions (strictement) monotones est (strictement) monotone, et la monotonie de $g \circ f$ est donnée par :

$f \setminus g$	$\nearrow$	$\searrow$
$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$
$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Proposition 2.9 (Injectivité des fonctions strictement monotones)**.** Soit $D \subseteq \mathbb{R}$ est $f : D \to \mathbb{R}$

* Si f croît strictement, alors : $\forall x, y \in D, f(x) \leq f(y) \implies x \leq y$
* Si f décroît strictement, alors : $\forall x, y \in D, f(x) \leq f(y) \implies x \geq y$
* Dans les deux cas, f est injective.

Proposition 2.10. Soit $D, E \subseteq \mathbb{R}$ et $f : D \to E$

* Si f est bijective et croissante, alors f est strictement croissante et $f^{-1} : E \to D$ aussi.
* Si f est bijective et décroissante, alors f est strictement décroissante et $f^{-1} : E \to D$ aussi.

2.3 Bornes et extrema

Définition 2.11. Soit $D \subseteq \mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$
On dit que f :

* Est <u>majorée</u> si $\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in D, f(x) \leq M$
* Est <u>minorée</u> si $\exists m \in \mathbb{R} : \forall x \in D, f(x) \geq m$
* Est <u>bornée</u> si elle est minorée est majorée.
* <u>Admet un maximum</u> si $\exists c \in D : \forall x \in D, f(x) \leq f(c)$
* <u>Admet un minimum</u> si $\exists d \in D : \forall x \in D, f(x) \geq f(d)$

Proposition 2.12. Soit $D \subseteq \mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$
Alors f est bornée si et seulement si $\exists c \in \mathbb{R}_+ : \forall x \in D, |f(x)| \leq c$

Proposition 2.13.

* La somme de deux fonctions $\begin{cases} \text{minorées} \\ \text{majorées} \end{cases}$ est $\begin{cases} \text{minorée} \\ \text{majorée} \end{cases}$
* La somme et le produit de deux fonctions bornées sont bornés.
* Si g est $\begin{cases} \text{minorée} \\ \text{majorée} \\ \text{bornée} \end{cases}$ alors toute composée de la forme $g \circ f$ est $\begin{cases} \text{minorée} \\ \text{majorée} \\ \text{bornée} \end{cases}$

2.4 Transformations d'un graphe

Étant donné $f : D \to \mathbb{R}$

* Pour $a \in \mathbb{R}$, le graphe de $f + a$: $\begin{cases} D \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) + a \end{cases}$
  est l'image de $\mathrm{gr}(f)$ par la translation de vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$
* Pour $a \in \mathbb{R}$, le graphe de $f(\cdot + a)$: $\begin{cases} D - a \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x + a) \end{cases}$
  est l'image de $\mathrm{gr}(f)$ par la translation de vecteur $\begin{pmatrix} -a \\ 0 \end{pmatrix}$
* Pour $a \in \mathbb{R}$, le graphe de $f(a - \cdot)$: $\begin{cases} D' \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(a - x) \end{cases}$ où $D' = \{x \in \mathbb{R} \mid a - x \in D\}$
  est l'image de $\mathrm{gr}(f)$ par la réflexion d'axe, la droite d'équation $x = \frac{a}{2}$
* Pour $\lambda \neq 0$, le graphe de λf : $\begin{cases} D \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda f(x) \end{cases}$
  est l'image de $\mathrm{gr}(f)$ par $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ \lambda y \end{pmatrix}$
* Pour $\lambda \neq 0$, le graphe de $f(\lambda \cdot)$: $\begin{cases} D' \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(\lambda x) \end{cases}$ où $D' = \{x \in \mathbb{R} \mid \lambda x \in D\}$
  est l'image de $\mathrm{gr}(f)$ par $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{x}{\lambda} \\ y \end{pmatrix}$

2.5 Limites

À partir de maintenant, I est un intervalle non trivial et x_0 est un élément ou une borne de I

Définition 2.14. Soit $l \in \mathbb{R}$
On dit que f converge (ou tend) vers l en x_0 et on note $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} l$ si
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in I, |x - x_0| \leq \delta \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon$

2.6 Continuité

Ici, I est un intervalle ,$x_0 \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$

Définition 2.15.
* La fonction f est continue en x_0 si $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} f(x_0)$
* La fonction f est continue si elle est continue en tout point de I

On note $C^0(I) = C^0(I; \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $I \to \mathbb{R}$ continues.

Théorème 2.16. L'ensemble des fonctions continues est stable par somme, par produit, par quotient (si le dénominateur ne s'annule pas), par composition...

2.7 Dérivabilité

Ici, I est un intervalle, $x_0 \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$

Définition 2.17.
* On appelle le taux d'accroissement de f en x_0 la fonction

$$\tau_{[f,x_0]} : \begin{cases} I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \end{cases}$$

* On dit que f est dérivable en x_0 si $\tau_{[f,x_0]}$ admet une limite finie en x_0
* Si c'est le cas, on note
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \tau_{[f,x_0]}(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
le nombre dérivé de f en x_0
* On dit que f est dérivable si elle est dérivable en tout point de I
* Si c'est le cas, on note
$$f' : \begin{cases} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f'(x) \end{cases}$$

Définition 2.18. Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en x_0, la tangente à $\mathrm{gr}(f)$ en x_0 est la droite passant par $\begin{pmatrix} x_0 \\ f(x_0) \end{pmatrix}$ et de pente $f'(x_0)$, càd la droite d'équation $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Proposition 2.19. Si f est dérivable en x_0, elle est continue en x_0
On note $D^1(I) = D^1(I; \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I
D'après la proposition précédente, $D^1(I) \subseteq C^0(I)$

Théorème 2.20. L'ensemble des fonctions dérivables est stable par somme, produit, quotient (si le dénominateur ne s'annule pas).

Théorème 2.21. Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables.
Alors $g \circ f$ est dérivable et $(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$

2.8 Tableau de variations

Dans toute la section, $I \subseteq \mathbb{R}$ est un intervalle non trivial et $f : I \to \mathbb{R}$

Théorème 2.22. Supposons $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable.

* La fonction f est constante ssi $\forall x \in I, f'(x) = 0$
* La fonction f est croissante ssi $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$
* Si f' est > 0 sur I, à l'exception éventuelle d'un nombre fini de points, alors f est strictement croissante.

Théorème 2.23 (des valeurs intermédiaires)**.** Soit $a \leq b$ deux éléments de I
Notons J le segment joignant $f(a)$ et $f(b)$ (donc $[f(a), f(b)]$ ou $[f(b), f(a)]$ suivant le cas)
Supposons f continue.
Alors $\forall y \in J, \exists x \in [a, b] : f(x) = y$

Théorème 2.24 (de bijection monotone, version segments)**.** Soit $a \leq b$ deux éléments de I

* On suppose f dérivable et $\forall x \in]a, b[, f'(x) > 0$
  Alors f induit une bijection strictement croissante $[a, b] \to [f(a), f(b)]$
* On suppose f dérivable et $\forall x \in]a, b[, f'(x) < 0$
  Alors f induit une bijection strictement décroissante $[a, b] \to [f(a), f(b)]$

Théorème 2.25. Soit $a \leq b$ deux éléments de I.
On suppose $f : I \to \mathbb{R}$ continue et strictement monotone sur $[a, b]$
Alors f induit une bijection $[a, b] \to \begin{cases} [f(a), f(b)] \\ [f(b), f(a)] \end{cases}$ suivant les cas.

Théorème 2.26 (de la bijection monotone, version intervalles ouverts)**.**
Soit $a < b$ deux réels et $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable, de dérivée > 0
Alors f admet des limites en a et b et induit une bijection strictement croissante $]a, b[\to \left] \lim_a f, \lim_b f \right[$

2.9 Fonctions réciproques

Ici, I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : I \to J$ est une bijection.

Graphiquement, $\mathrm{gr}(f)$ et $\mathrm{gr}(f^{-1})$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$

Théorème 2.27 (Continuité de la réciproque)**.**
Si $f : I \to J$ est bijective et continue, alors $f^{-1} : J \to I$ est continue.

Théorème 2.28 (Critère de dérivabilité des réciproques)**.**
Supposons $f : I \to J$ bijective et dérivable. Soit $x_0 \in I$ et $y_0 = f(x_0) \in J$
Alors f^{-1} est dérivable en y_0 si et seulement si $f'(x_0) \neq 0$
Si c'est la cas,

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

2.10 Étude d'une fonction : le plan

Étant donné une fonction, on peut l'étudier en six (ou sept) étapes.

(0. Si sule une expression est donnée, on détermine un domaine de définition.
On a alors une fonction $f : D \to \mathbb{R}$)
1. On examine les propriétés de symétrie de la fonction. Si on peut, on l'étudie sur un domaine plus petit.
2. On examine la régularité de la fonction : continuité, dérivabilité ?
3. Là où c'est possible, on calcule la dérivée (en cherchant la forme la plus "multiplicative" possible)
4. Tableau de variations.
5. Limites.
6. Esquisse de graphe.

Proposition 2.29. On a $\forall x \in]-1, +\infty[, \ln(1+x) \leq x$

3 Fonctions usuelles

3.1 Exponentielle

On a vu que $\forall z \in \mathbb{C}, \exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}$. En particulier, $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) \in \mathbb{R}$

Définition 3.1. On appelle exponentielle (réelle) la fonction $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ induite par l'exponentielle complexe.

Proposition 3.2. L'exponentielle $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
* Est strictement positive : $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) > 0$
* Est dérivable et $\exp' = \exp$
* Admet des limites $\begin{cases} \exp(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0 \\ \exp(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty \end{cases}$
* Vérifie la propriété fondamentale : $\forall x, y \in \mathbb{R} : \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$

Lemme 3.3. On a $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) \geq x + 1$

Corollaire 3.4. exp induit une bijection $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$

3.2 Logarithme

Définition 3.5. On note $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ la réciproque de exp

Proposition 3.6.
* ln est une bijection strictement croissante $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$
* ln est dérivable et $\forall y \in \mathbb{R}_+^*, \ln'(y) = \frac{1}{y}$
* On a $\ln(y) \xrightarrow[y \to 0]{} -\infty$ et $\ln(y) \xrightarrow[y \to +\infty]{} +\infty$
* On a $\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}_+^*, \ln(y_1 y_2) = \ln(y_1) + \ln(y_2)$

Proposition 3.7. $\forall x \in]-1, +\infty[, \ln(1+x) \leq x$

3.3 Puissances

Définition 3.8. Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $a \in \mathbb{R}$
On définit $r^a = \exp(a\ln(r))$

Proposition 3.9. Soit $r, s \in \mathbb{R}_+^*$ et $a, b \in \mathbb{R}$
On a :

* $r^{a+b} = r^a r^b$
* $(r^a)^b = r^{a^b}$
* $(rs)^q = r^q s^q$

Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$: L'exponentielle de base r : $x \mapsto r^x$
Elle est :

* Strictement décroissante si $r < 1$
* Constante (égale à 1) si $r = 1$
* Strictement croissante si $r > 1$

La fonction "puissance a-ième" : $x \mapsto x^a$ est :

* Strictement décroissante si $a < 0$
* Constante (égale à 1) si $a = 0$
* Strictement croissante si $a > 0$

Définition 3.10. Soit $r \in]0,1[\cup]1,+\infty[$
On définit le logarithme en base r : $\log_r : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ comme la réciproque de $\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^* \\ x \mapsto r^x \end{cases}$

Proposition 3.11. Soit $r \in]0,1[\cup]1,+\infty[$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$
On a
$$\log_r(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(r)}$$

3.4 Croissances comparées

Théorème 3.12. La fonction $x \mapsto x$ est <u>négligeable devant exp au voisinage de $+\infty$</u> :

$$\forall \varepsilon, A > 0, \quad \frac{x^A}{\exp(x)^\varepsilon} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

$$\forall \varepsilon, A > 0, \quad \frac{\ln(x)^A}{x^\varepsilon} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

$$\forall \varepsilon, A > 0, \quad \frac{|\ln(x)|^A}{\left(\frac{1}{x}\right)^\varepsilon} = x^\varepsilon |\ln(x)|^A \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

3.5 Trigonométrie hyperbolique

Définition 3.13. On définit les fonctions <u>(co)sinus hyperbolique</u> :

$$\cosh : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{cases} \qquad \sinh : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{cases}$$

Proposition 3.14.

* cosh est paire, dérivable, de dérivée
$$\cosh' = \sinh$$
et possède les limites $\cosh(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} +\infty$
* sinh est impaire, dérivable, de dérivée
$$\sinh' = \cosh$$
et $\sinh(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$ et $\sinh(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$
* On a $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$

Définition 3.15. On définit la fonction tangente hyperbolique :

$$\tanh : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \end{cases}$$

Proposition 3.16. La fonction tanh est impaire, dérivable, de dérivée

$$\tanh' = 1 - \tanh^2 = \frac{1}{\cosh^2}$$

et vérifie $\tanh(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} \pm 1$

3.6 Fonctions trigonométriques réciproques

Définition 3.17. On appelle <u>arc cosinus</u> $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$ la réciproque de la bijection induite $\cos\Big|_{|[0,\pi]}^{|[-1,1]}$
On appelle <u>arc sinus</u> $\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ la réciproque de la bijection induite $\sin\Big|_{|[-\frac{\pi}{2}]}^{|[-1,1]}$

Proposition 3.18. On a $\forall y \in [-1,1]$, $\cos(\arcsin(y)) = \sin(\arccos(y)) = \sqrt{1-y^2}$

Proposition 3.19. arccos et arcsin sont non dérivables en -1 et 1, mais dérivables en tout $y \in \,]-1,1[$ et $\forall y \in \,]-1,1[$:

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \qquad \arccos'(y) = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$$

3.7 Tangente

Définition 3.20. On note $D_{\tan} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \not\equiv \frac{\pi}{2} (\mathrm{mod}\ \pi)\right\} = \cos^{-1}[\mathbb{R}^*]$
On définit la fonction <u>tangente</u>

$$\tan : \begin{cases} D_{\tan} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \end{cases}$$

Proposition 3.21. tan est impaire, π-périodique, dérivable de dérivée

$$\tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$$

et on a $\tan(x) \xrightarrow[\substack{x\to\frac{\pi}{2} \\ x<\frac{\pi}{2}}]{} +\infty$ et $\tan(x) \xrightarrow[\substack{x\to\frac{\pi}{2} \\ x>\frac{\pi}{2}}]{} -\infty$

Proposition 3.22. Soit $x, y \in D_{\tan}$

* Si $x + y \in D_{\tan}$, on a

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$$

* Si $x - y \in D_{\tan}$, on a

$$tan(x-y) = \frac{\tan(x) - \tan(y)}{1 + \tan(x)\tan(y)}$$

Proposition 3.23. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \not\equiv \pi (\text{mod } 2\pi)$
On peut exprimer $\cos(x)$ et $\sin(x)$ en fonction de $t = \tan(\frac{x}{2})$

$$\cos(x) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \qquad \sin(x) = \frac{2t}{1 + t^2}$$

3.8 Arc tangente

Par le théorème de la bijection monotone, tan induit une bijection $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$

Définition 3.24. On appelle arc tangente la fonction $\arctan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, réciproque de la bijection induite $\tan_{|\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[}$

Proposition 3.25. arctan est une fonction impaire, dérivable, de dérivée

$$\arctan' : y \mapsto \frac{1}{1 + y^2}$$

et telle que $\arctan(x) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} \pm\frac{\pi}{2}$

Proposition 3.26. Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}^*$ que l'on écrit $z = re^{i\theta}$, où $r > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$
On a $\begin{cases} a = \text{Re}(z) = r\cos(\theta) \\ b = \text{Im}(z) = r\sin(\theta) \end{cases}$
Supposons $a \neq 0$ (càd $z \notin i\mathbb{R}$)
On a alors

$$\frac{b}{a} = \frac{r\cos(\theta)}{r\sin(\theta)} = \tan(\theta)$$

Donc θ est un antécédent de $\frac{b}{a}$ par tan

$$\theta \equiv \arctan\left(\frac{b}{a}\right) (\text{mod } \pi)$$

Proposition 3.27. On a $\forall x \in \mathbb{R}^*$

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \text{sgn}(x)\frac{\pi}{2}$$

4 Brève extension aux fonctions à valeurs complexes

Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle.

Définition 4.1. Soit $f : I \to \mathbb{C}$
On dit que f est dérivable si les fonctions $\begin{cases} \text{Re}(f) : I \to \mathbb{R} \\ \text{Im}(f) : I \to \mathbb{R} \end{cases}$ sont dérivables.
Si c'est la cas, on définit la dérivée de f

$$f' = \text{Re}(f)' + i\,\text{Im}(f)'$$

Proposition 4.2. Soit $f, g : I \to \mathbb{C}$ dérivables et $\lambda \in \mathbb{C}$
Alors :

- $*$ λf est dérivable et $(\lambda f)' = \lambda f'$
- $*$ $f + g$ est dérivable et $(f+g)' = f' + g'$
- $*$ fg est dérivable et $(fg)' = f'g + fg'$
- $*$ Si g ne s'annule pas, $\frac{f}{g}$ est dérivable et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
- $*$ $\exp \circ f$ est dérivable et $(\exp \circ f)' = f' \cdot (\exp \circ f)$

5 Dérivée d'ordre supérieur

Ici, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non trivial.

5.1 Définition

Définition 5.1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$

- $*$ On dit que f est <u>deux fois dérivable</u> si f est dérivable et que f' est dérivable.
  On note alors $f'' = (f')'$
- $*$ Par récurrence, pour tout $n \geq 2$, <u>f est n fois dérivable</u> si f est $(n-1)$ fois dérivable et que $f^{(n-1)}$ est dérivable.
  On note alors $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$ la dérivée n-ième.
- $*$ On note $D^n(I) = D^n(I; \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions n fois dérivables.
- $*$ On dit que f est <u>lisse</u> ou <u>de classe C^∞</u> si elle est n fois dérivable pour tout $n \in \mathbb{N}$
  On note $C^\infty(I) = C^\infty(I; \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions lisses.

<u>Convention</u> : Toute fonction est "0 fois dérivable" et $f^{(0)} = f$

5.2 Propriétés de stabilité

Proposition 5.2. Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ n fois dérivable et $\lambda \in \mathbb{R}$
Alors λf est n fois dérivable et $(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}$
Et $f + g$ est n fois dérivable et $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$

Corollaire 5.3. Toute combinaison linéaire de fonctions lisses est lisse.

Théorème 5.4 (Formule de Leibniz)**.** Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ n fois dérivables.
Alors fg est n fois dérivable et

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Corollaire 5.5. Le produit de deux fonctions lisses est lisse.

Théorème 5.6. La composée de deux fonctions n fois dérivables est n fois dérivables.

Corollaire 5.7. La composée de deux fonctions lisses est lisse.